Лекция 11
Ряды Тейлора и Маклорена. Разложения функций в ряды Маклорена.

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- Дать студентам понимание формулы Тейлора, частного случая — ряда Маклорена, а также научить применять разложения для приближённых вычислений и анализа функций.

Основные вопросы:

- Понятие разложения функции в ряд Тейлора.
- Ряд Маклорена как частный случай ряда Тейлора.
- Формула Тейлора с остаточным членом.
- Условия разложимости функции в степенной ряд.
- Разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.
- Применение разложений к вычислениям и приближениям функций.

Как известно, для любой функции f(x), определенной в окрестности точки x_0 и имеющие в ней производные до (n+1) -го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (1)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0; x)$

- остаточный член в формуле Лагранжа.

Из формулы Тейлора получается разложение функции f(x) по степеням $(x - x_0)$, называемое рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

(3)

Теорема 1. Для того чтобы ряд Тейлора (2) функции f(x) сходился к f(x)в точке x , необходимо и достаточно, чтобы в этоы точке остаточный член формулы Тейлора (1) стремился к нулю при , т.е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Теорема 2. Если модули всех производных функций f(x) ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом M > O, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции f(x) сходится к функции f(x), т. е. имеет место разложение (2).

Для разложения функции f(x) в ряд Маклорена (3) нужно:

а) найти производные $f'(x),\ f''(x), \dots, f^{n}(x), \dots$

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал (-R; R), в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция f(x) и сумма ряда Маклорена совпадают.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \qquad (4)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \qquad (5)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty; \infty) \qquad (6)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \qquad x \in (-1; 1\,] \qquad (7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad x \in (-1; 1) \qquad (8)$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = e^x$

Производые этой функции:

$y' = (e^x)' = e^x$, $y'' = (e^x)' = e^x$, …, $f^{(n)}(x) = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$. Тогда значение функции и всех ее производных в точке $x = 0$:

$y' = e^0 = 1$, $y'' = e^0 = 1$, …, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получим разложение исходной функции в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Областью сходимости этого ряда является интервал $(-\infty, \infty)$

Контрольные вопросы

- Дайте определение ряда Тейлора.
- Чем ряд Маклорена отличается от ряда Тейлора?
- Как выглядит формула Тейлора с остаточным членом?
- Какие функции можно разложить в ряд Маклорена?
- Приведите примеры разложения элементарных функций (e^x, sin x, cos x).
- Для чего используют разложения Тейлора и Маклорена?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.